Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

Montag, 9. Mai 2022 (Vormittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2222 – 7127

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

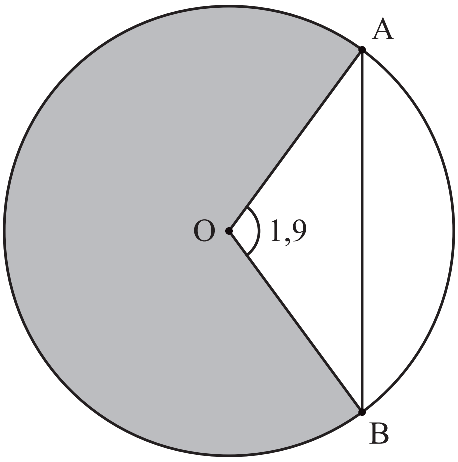
Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 5 Meter.

Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis, und $\mathrm{A\hat{O}B} = 1{,}9$ (im Bogenmaß).

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(a) Finden Sie die Länge der Sehne $[\mathrm{AB}]$. [3]

(b) Finden Sie die Fläche des schattierten Sektors. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Ableitung einer Funktion g ist gegeben durch $g'(x) = 3x^2 + 5e^x$, mit $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von g verläuft durch den Punkt $(0, 4)$. Finden Sie $g(x)$.

3. [Maximale Punktzahl: 6]

Die Ereignisse A und B sind unabhängig, und $\mathrm{P}(A) = 3\mathrm{P}(B)$.

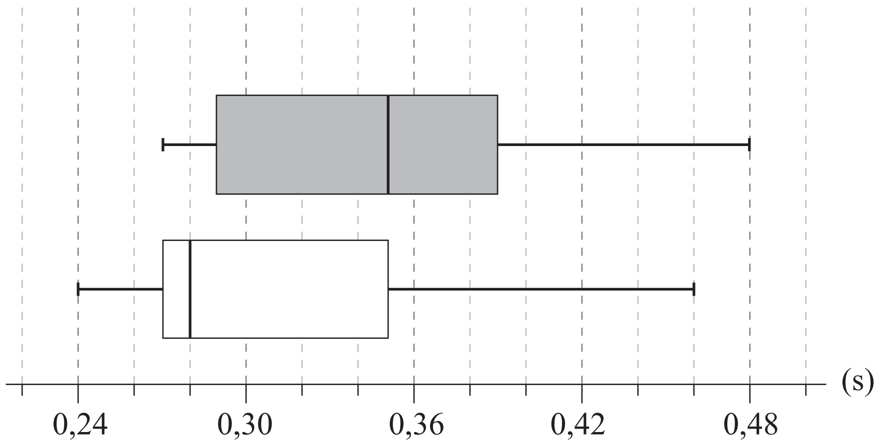
Es gelte $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}68$. Finden Sie $\mathrm{P}(B)$.

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Eine zufällige Stichprobe von neun Erwachsenen wurde ausgewählt, um herauszufinden, ob guter Schlaf ihre Reaktionszeit auf einen visuellen Reiz beeinflusst. Die Reaktionszeit eines jeden Erwachsenen wurde zweimal gemessen.

Die erste Messung der Reaktionszeit wurde an einem Morgen durchgeführt, an dem der Erwachsene gut geschlafen hatte. Die zweite Messung wurde an einem Morgen durchgeführt, an dem derselbe Erwachsene nicht gut geschlafen hatte.

Die Box-und-Whisker-Diagramme für die Reaktionszeiten in Sekunden sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



Legende:

☐ Erste Reaktionszeit (gut geschlafen)

▩ Zweite Reaktionszeit (nicht gut geschlafen)

Betrachten Sie das Box-und-Whisker-Diagramm, das die Reaktionszeiten nach einem guten Schlaf darstellt.

(a) Geben Sie den Median der Reaktionszeit nach einem guten Schlaf an. [1]

(b) Validieren Sie, dass die Messung von $0{,}46$ Sekunden kein Ausreißer ist. [3]

(c) Geben Sie an, warum die mittlere Reaktionszeit größer zu sein scheint als der Median der Reaktionszeit. [1]

Betrachten Sie nun die beiden Box-und-Whisker-Diagramme.

(d) Kommentieren Sie, ob diese Box-und-Whisker-Diagramme Anhaltspunkte dafür liefern, dass unzureichender Schlaf zu einer Verlängerung der Reaktionszeit führt. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 4)

5. [Maximale Punktzahl: 7]

Ein Teilchen bewegt sich auf einer geraden Linie, so dass seine Geschwindigkeit v in $\mathrm{m\,s^{-1}}$ zum Zeitpunkt t Sekunden gegeben ist durch $v = \frac{(t^2+1)\cos t}{4}$, mit $0 \le t \le 3$.

(a) Bestimmen Sie, wann das Teilchen seine Bewegungsrichtung ändert. [2]

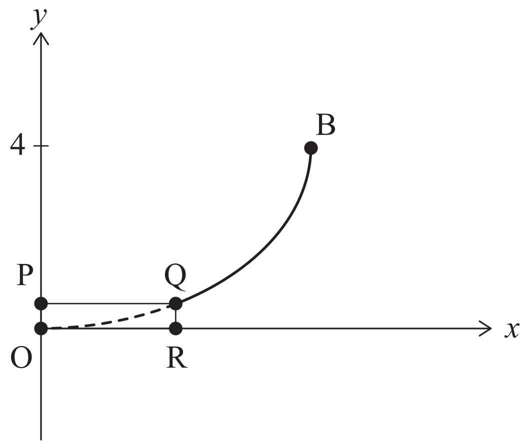
(b) Finden Sie die Zeitpunkte, an denen die Beschleunigung des Teilchens $-1{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ beträgt. [3]

(c) Finden Sie die Beschleunigung des Teilchens zu dem Zeitpunkt, an dem seine Geschwindigkeit am größten ist. [2]

6. [Maximale Punktzahl: 5]

Das folgende Diagramm zeigt die Kurve $\frac{x^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$, wobei $h \le y \le 4$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Die Kurve von Punkt Q zu Punkt B wird um $360°$ um die y-Achse gedreht. Die entstandene Figur bildet die Innenfläche einer Schale. Das Rechteck OPQR mit der Höhe h in cm wird um $360°$ um die y-Achse gedreht und bildet dann einen festen Sockel.

Die Schale habe eine vernachlässigbare Dicke.

Das Innenvolumen der Schale beträgt $285\,\mathrm{cm}^3$. Bestimmen Sie die Höhe des Sockels.

7. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan(\cos x)-k}{x^2}$, mit $k\in\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein endlicher Grenzwert nur für $k=\dfrac{\pi}{4}$ existiert. [2]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Regel von de L'Hospital algebraisch, dass der Grenzwert $-\dfrac{1}{4}$ ist. [6]

8. [Maximale Punktzahl: 7]

Rachel und Sophia nehmen an einem Speerwurf-Wettbewerb teil.

Rachels Wurfweiten R in Meter können durch eine Normalverteilung mit Durchschnittswert $56{,}5$ und Standardabweichung 3 modelliert werden.

Sophias Wurfweiten S in Meter können durch eine Normalverteilung mit Durchschnittswert $57{,}5$ und Standardabweichung $1{,}8$ modelliert werden.

In der ersten Runde des Wettbewerbs muss jeder Teilnehmer fünf Würfe absolvieren. Um sich für die nächste Runde des Wettbewerbs zu qualifizieren, muss ein Teilnehmer in der ersten Runde mindestens einen Wurf von 60 Metern oder mehr erzielen.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich nur Rachel oder nur Sophia für die nächste Runde des Wettbewerbs qualifiziert.

9. [Maximale Punktzahl: 4]

Betrachten Sie die Menge der sechsstelligen positiven ganzen Zahlen, die aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 gebildet werden können.

Finden Sie die Gesamtanzahl der sechsstelligen positiven ganzen Zahlen, die so gebildet werden können, dass

(a) die Ziffern voneinander verschieden sind; [2]

(b) die Ziffern voneinander verschieden sind und in aufsteigender Reihenfolge auftreten. [2]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Ein Wissenschaftler führte ein neunwöchiges Experiment mit zwei Pflanzen A und B derselben Art durch. Er wollte die Auswirkungen der Verwendung eines neuen Pflanzendüngers untersuchen. Pflanze A wurde regelmäßig gedüngt, Pflanze B jedoch nicht.

Der Wissenschaftler fand heraus, dass die Höhe h_A der Pflanze A (in cm) zum Zeitpunkt t (in Wochen) durch die folgende Funktion modelliert werden kann: $h_A(t) = \sin(2t + 6) + 9t + 27$, mit $0 \le t \le 9$.

Der Wissenschaftler fand heraus, dass die Höhe h_B der Pflanze B (in cm) zum Zeitpunkt t (in Wochen) durch die folgende Funktion modelliert werden kann: $h_B(t) = 8t + 32$, mit $0 \le t \le 9$.

(a) Finden Sie mit Hilfe dieser Modelle des Wissenschaftlers die folgenden Größen:

(i) Die Anfangshöhe der Pflanze B;

(ii) Die Anfangshöhe der Pflanze A auf drei signifikante Stellen genau. [3]

(b) Finden Sie die Werte von t für $h_A(t) = h_B(t)$. [3]

(c) Beweisen Sie, dass für $t > 6$ Pflanze A stets größer war als Pflanze B. [3]

(d) Finden Sie für $0 \le t \le 9$ den gesamten Zeitraum, in dem die Wachstumsrate der Pflanze B größer war als die der Pflanze A. [6]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 20]

Zwei Flugzeuge A und B haben in Bezug auf den Ursprung O die folgenden Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hierbei stellt t die Zeit in Minuten dar, und es gilt: $0 \le t \le 2{,}5$.

Die Einträge in jedem Spaltenvektor geben die Entfernung von O nach Osten bzw. nach Norden sowie die Höhe über dem Meeresspiegel an, jeweils gemessen in Kilometern.

(a) Finden Sie die dreistellige Peilung (Kompasszahl), auf der das Flugzeug B unterwegs ist. [2]

(b) Zeigen Sie, dass Flugzeug A mit höherer Geschwindigkeit fliegt als Flugzeug B. [2]

(c) Finden Sie den spitzen Winkel zwischen den Fluggeraden der beiden Flugzeuge. Geben Sie Ihre Antwort in Grad an. [4]

Die Fluggeraden der beiden Flugzeuge kreuzen sich im Punkt P.

(d) (i) Finden Sie die Koordinaten von P.

(ii) Bestimmen Sie die Zeitspanne zwischen der Ankunft des ersten und des zweiten Flugzeugs am Punkt P. [7]

Es sei $D(t)$ die Entfernung zwischen den Flugzeugen A und B für $0 \le t \le 2{,}5$.

(e) Finden Sie den kleinsten Wert von $D(t)$. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 21]

Die Population P einer bestimmten Beuteltierart auf einer kleinen abgelegenen Insel kann durch die folgende logistische Differentialgleichung modelliert werden:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

Hierbei ist t die in Jahren gemessene Zeit, und k, N sind positive Konstanten.

Die Konstante N steht für die größte Population dieser Beuteltierart, die auf der Insel auf Dauer leben kann.

(a) Interpretieren Sie im Kontext dieses Populationsmodells die Bedeutung von $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$. [1]

(b) Zeigen Sie, dass gilt: $\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{N}\right)\left(1 - \frac{2P}{N}\right)$. [4]

(c) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass die Population der Beuteltiere für $P = \frac{N}{2}$ ihre höchste Zuwachsrate hat.
Begründen Sie Ihre Antwort. [5]

(d) Bestimmen Sie unter Nutzung der Vorarbeit das Maximum von $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ abhängig von k und N. [2]

Es sei P_0 die Anfangspopulation der Beuteltiere.

(e) Zeigen Sie durch Lösen der logistischen Differentialgleichung, dass ihre Lösung in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$$kt = \ln\frac{P}{P_0}\left(\frac{N - P_0}{N - P}\right).$$ [7]

Nach 10 Jahren beträgt die Population der Beuteltiere $3P_0$. Es ist bekannt, dass $N = 4P_0$.

(f) Finden Sie den Wert von k für dieses Populationsmodell. [2]

Quellen:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.